利用衰降資料以評估可靠度

◎李麗女

針對高可靠性的產品，典型上利用實務上的試驗耐受度實驗，很難觀察到或幾乎沒有失效的樣品產生，因此其所能提供的可靠度壽命的資訊是很少的。本文，我們要說明利用衰降的資料以評估可靠度的優勢，因為它的優勢讓我們得以利用貝氏方法以分析衰降的資料，可靠度的不確定性以及壽命分佈百分比的估計值即可用如此直接的方式加以確定，再者，要計算在特定時間的一個母體之單體其不同的壽命之可靠度就很容易做到了，我們以一個雷射衰降的例子闡明這些優點。

簡　介

很多的可靠度文獻著重於使用壽命資料以進行可靠度的評估，但是對於具有高可靠性的產品，以壽命資料評估可靠度是有些問題的，針對實務上的試驗耐受度，很少或可能幾乎沒有失效的情況發生，因此大部份的觀察值都會被加以審查的，這樣的資料針對產品壽命的比例提供了較少的資訊，亦即其訂貨單的保證期間遠長於測試的耐受期。

最近，衰降的資料顯示出在壽命資料上較具有卓越的選擇性，因為在這樣的情況下，它們具有較多的情報 (Chiao, and Hamada, 1996, 2001 ; Lu and Meeker, 1993 ; Lu, Meeker, and Escobar, 1996 ; Tseng, Hamada ; and Chiao, 1995)，大部份的失效起因於一個運轉中衰降的機制，例如一項化學反應的發展，因此其特性值隨著時間的經過而衰減（或遞增），我們認定該情況下的失效乃依照一項可觀察的特性值加以定義的。例如，一道裂痕經過一段時間而變長，其失效的定義為當裂痕達到一個特定的長度發生時；另外一個例子則為營光燈的亮度隨著時間而降低，其失效的定義為當燈管的光度在使用100小時之後衰降到60%或更低的光度時，這種情況的失效視之為“軟性的”失效，因為單體仍能使用，只是它們的績效不被接受。

本文的目的是為了說明衰降資料為何可以加以模式化並分析之，我們展示了貝氏方法如何提供一個合乎常情的方法以分析衰降的資料，特別地，因為可靠度是衰降模式的參數函數，在特定的時間其尾部的可靠度之分佈是直接由模式參數後面的分佈中取得的，因為一個產品的母體時常包含有不同壽命長短的產品，母體的壽命分佈必需併入到在一特定的時間內對母體可靠度的評估之中。我們也展示了在特定的時間內如何計算母體可靠度，其也是直接地使用貝氏的方法。

本文的綱要如下，在下一節中，我們要提出一個簡單的衰降資料模式，在“雷射衰降的例子”這一節介紹了一個雷射衰降的例子，在“貝氏理論”這一節，以貝氏方法提出分析衰降的資料，雷射衰降資料在“再次探討雷射衰降例子”章節中，顯示出利用貝氏方法可以很容易地算出可靠度函數及壽命百分比。在“一群母體的可靠度”章節，當母體中產品的壽命有所不同，可以算出在特定時間之母體可靠度估計值，最後結論是利用壽命資料及虛擬壽命資料相互比較，其分別取自“與壽命時間資料相互比較”和“與虛擬壽命時間資料相互比較”兩章節，最後以討論做為結束。

一個簡單的衰降模式

想想下列的線性衰降曲線從0開始的模式，假如我們有這n個單體之資料，對第i個單體，在時間t的真實衰降以$D_i(t)$表示，可以$D_i(t)=(1/\theta_i)t$.....(1)表示，（亦即，截距為0而斜率為$\frac{1}{\theta_i}$），一個單體被定義為已經失敗是當衰降值達到D_f此一門檻，為了解決$D_i(t)=D_f$，對第i個單體的壽命T_i是為$D_f\theta_i$。

對那些單體有不同的壽命，θ_i必需因各個單體的不同而有不同的值，亦即，θ_i是一個隨機變數，對單體壽命服從Weibull分佈，倒數斜率$\{\theta_i\}$必需服從Weibull分佈，為了要了解這一點，需注意到假使$\{\theta_i\}$服從Weibull(β, λ)的分佈，則壽命時間服從Weibull$(\beta, \lambda/D_f^{\beta})$的分佈（亦即，形狀參數$\beta$及$\lambda$規模參數$\lambda/D_f^{\beta}$）。

實務上，衰降資料的取得是經過一段時間從衰降曲線中抽樣取得的，而且它們是受制於量測的誤差，因此，在時間t_{ij}（亦即$D_i(t_{ij})$）觀察到的衰降資料其誤差為ε_{ij}，對觀察衰降值y_{ij}將有下列加法的模式：$y_{ij}=D_i(t_{ij})+\varepsilon_{ij}=(1/\theta_i)t_{ij}+\varepsilon_{ij}$...(2)，其中$\varepsilon_{ij}$假設為獨立的分佈$N(0,\sigma_\varepsilon^2)$，注意第i個單體的衰降資料提供有關$\theta_i$及$\sigma_\varepsilon^2$的資訊，單體中一個樣本的衰降資料是需要取得$(\beta, \lambda)$的資訊，參數$\theta_i$服從Weibull分佈。

雷射衰降的例子

想想下列雷射衰降的例子，針對衰降資料其中等式(1)及(2)提供了一個合理的模式，在一個固定的操作電流下，雷射燈光的輸出是隨著時間而衰降的，為了維持一個固定的亮度輸出，操作電流需要隨著時間而增加，雷射失效定義為當發生其操作電流達到一特定的值，Meeker及Escobar(1998)提出雷射衰降資料其中衰降反應為操作電流（相對於原始的操作電流）增加的百分比，雷射衰降資料可在網址http://www.stat.lanl.gov/Hamada/degradation_data.htm及圖1中取得，例如，第10單位的衰降反應，其衰降是最快的，而且從0到4,000小時每250小時就觀察，其值為(0.000,0.4136,1.4880,2,3810,2.9950,3.8350,4.5010,5.2510,6.2560,7.0510,7.8030,8.3210,8.9300,9.5540,10.4500,11.2800,12.2100)，其失效門檻D_f為10%，亦即在10%時，一個雷射雖然仍能使用卻被定義為已經失效的。

因為在圖1中的衰降曲線是線性的，我們利用等式(1)的線性衰降模式以及等式(2)中常態的量測錯誤之衰降資料，虛擬壽命是由每一衰減曲線取得適合的直線，當合適的直線達到失效的門檻時再計算其時間(Meeker及Escobar,1998;Tseng, Hamada及Chiao,1995)，其可以使用於確認一個適宜的壽命分佈，Meeker及Escobar(1998)展示出這類例子的虛擬壽命其以Weibull分佈描述得相當的好，因此更鞏固了我們早先的假設。

貝氏推論

貝氏推論提供了一個方式以估算未知的模式參數$\eta=(\lambda,\beta,\sigma_\varepsilon^2)$並且透過結果參數的尾部分佈評估它們的不確定度，因此它結合了先前有關於η的資訊以及在資料中所含蓋有關於η的資訊，先前的資訊是由先前已知的機率密度函數$\pi|(\eta)$描述，而由已知的概數資料抽樣模式$f(y|\eta)$中所擷取提供資料，獲得此一結合性的資訊之後，再以另一個機率密度函數同$\pi(\eta|y)$加以描述稱之為尾部，因此，此即為貝氏理論計算尾部的方式，$\pi(\eta|y)=f(y|\eta)\pi(\eta)/\int f(y|\gamma)\pi(\gamma)d\gamma$ ....(3)

貝氏計算在最近有長足的進步使得從尾部的模式參數中抽樣變得較容易(Casella and George, 1992; Chib and Greenberg, 1995; Gelman et al.,1995)，抽樣是透過馬可夫鏈蒙地卡羅(MCMC)模擬法完成的，因樣本對可靠度功能及母體可靠度的推論提供了較方便的推估方式。以雷射衰減為例，我們利用貝氏套裝軟體Win BUGS(Spiegelhalter et al., 2000)以完成貝氏推論，Win BUGS可以從網站 http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/免費下載取得而且可以很容易地執行MCMC，雷射衰減例子的Win BUGS代碼可從http://www.stat.lanl.gov/Hamada/degradation_code.htm取得。

再次探討雷射衰減例子

現在讓我們來分析雷射衰減資料，圖1中所顯示的雷射衰減資料之統計模式可以下列式子簡潔地加以陳述，$y_{ij}|\theta=\theta_i$~N$((1/\theta_i)\ t_{ij},\sigma_\varepsilon^2)$, θ_i~Weibull (β,λ)。想想第i個單體，在第j個時間t_{ij}的真正衰減為$(1/\theta_i)t_{ij}$而且其相對應的觀察衰減y_{ij}產生了一項附加的常態量測誤差。亦即，在θ_i未知的條件下，第i個單體之觀察衰減值為常態性的分佈，所以是常態衰減值為概數值的一部份；事實上θ_i是服從Weibull分佈的，也是概數值的一部份，而且是相當地容易被併入到貝氏方法中，因此，θ_i和λ, β及σ_ε^2都一樣是未知的參數。

對β,λ及 σ_ε^2我們採用非常均一的優先重要順序值，條列如下：

$\beta\sim$ Gamma(0.01,0.01)

$\lambda\sim$ Gamma(0.01,0.01)

$\sigma_\varepsilon^2\sim$ Inverse Gamma (0.01,0.01)

如此資料就會主動地導向結果，因為β及λ皆為正數的數值，因此對β及λ挑選相同的Gamma分佈，量測誤差變異數σ_ε^2也是一個正數值，但是在貝氏文獻上的傳統已習慣於對此一參數採用Inverse Gamma分佈，所得到的結果是，σ_ε^2的倒數也是屬於Gamma分佈。

$(\beta, \lambda, \sigma_\varepsilon^2, \theta_i, i=1......,15)$ 的尾部是以MCMC的方法取得的並有一段熱身期，將500個抽取掉並且維持數量不變少，亦即，達到熱身期是由丟棄前面500個樣本，而且因為並未有數量變少的問題，維持著後面10,000個樣品，因此，結果是根據取自尾部$(\beta, \lambda, \sigma_\varepsilon^2, \theta_i, i=1,....,15)$的10,000個樣本。例如，前兩個樣本和第10,000個樣本的主要參數$(\beta, \lambda, \sigma_\varepsilon^2)$為(3.398,5.323E-10,0.2059)，(3.388,4.890E-10,0.2071)...(7.637,6.187E-19,0.1928)。表1呈現出這10,000個樣本之$(\beta, \lambda, \sigma_\varepsilon^2)$的尾部彙總，表中也包括平均值，標準差以及0.025,0.050,0.500,0.950,0.975百分比時各個參數值。

其次，從這些分析結果，我們運用推論推得可靠度函數的形式為$R(t)=1-F(t)=\exp(-(\lambda/D_f^\beta)t^\beta)$.....(4)，利用尾部樣本可以針對每一個t很容易地取得其尾部R(t)，針對每個取自尾部為(β, λ)的樣本評估其R(t)值。例如，前述所列的三個樣本在4,500小時的可靠度相對應分別為0.7729,0.8181以及0.7775。對雷射衰減例子而言，圖2展示出其中位數及其R(t)在95%的信用區間0.025及0.975尾部百分比的點線乃用於建構95%的信用區間，注意貝氏文獻上以信用取代信賴，舉個例，對R(4500)的尾部彙總表1中已列出，其中位數及95%的信用區間分別為0.7200及(0.5236,0.8477)。

我們也可以對百分比的壽命分佈提出推論（亦即，在$\alpha \times 100\%$的時間前已發生失效），其形式為 $t_\alpha=[-(D_f^\beta/\lambda \ln(1-\alpha)]^{1/\beta}$ ...(5)，再次地，t_α的尾部可以很容易地被獲得，因為它是 β 及 λ 的一個函數，再舉個例子，0.1百分比的$t_{0.1}$的尾部彙總表列在表1中，它的中位數及95%信用區間分別為3699.0及(2852.0,4206.0)小時。

一群母體的可靠度

假設母體中所有的單體有相同壽命，現在利用可靠度函數直接應用到一群母體，假設單體的壽命並不一樣且在特定的時間τ時，其壽命可以具有平均值4,000及標準差100的常態分佈加以描述（在後來的時間點$\tau+\triangle\tau$的壽命分佈是必然地不同的），令T代表該單體在時間 τ 時的壽命，而R(T)代表該單體的可靠度，則對一已知的(β, λ)，在時間點τ的母體平均可靠度為 $E[R(T)|(\beta, \lambda)]=\int R(t)f_\tau(t)dt$，其中$f_\tau(t)$為在時間$\tau$時的壽命分佈，即為$N(4,000,100^2)$雖然期望的可靠度包含了積分的計算，但是卻可以模擬法很容易地逼近取得，從$N(4,000,100^2)$壽命分佈中抽取一個樣本，在這些壽命時間點評估其可靠度，並計算它們的平均值，對(β, λ)的每個尾部樣本計算母體可靠度產生了圖3母體可靠度的尾部，母體可靠度的中位數及95%信用區間分別為0.914和(0.770,0.972)。

與壽命時間資料相互比較

以雷射衰減資料為例，我們已經做成的聲明為一般衰減資料提供了更多的資訊，利用圖1所示的衰減資料，其壽命時間資料包含了三個檢查區間的觀察值：對單體

3,6及10分別為{(3750,4000), (3500,3750), (3250,3500)} 而且其右邊 12 個檢查的觀察值為 (at 4,000) 。想想壽命時間服從Weibull(β, λ/D_f^{β})分佈，貝氏分析使用和前面相同的β及λ值所產生的尾部彙總呈現在表2中，結果是95%的信用區間較為寬廣，這點解釋了與表1中所取得的那些衰減資料相互比較，其不確定度增加了，現在對R(4500)及$t_{0.1}$的95%信用區間分別為(0.3004,0.9215)及(2272.0,4801.0)小時。

與虛擬壽命時間資料相互比較

同樣也分析虛擬壽命時間估計值，假設衰減資料是合宜的，並且利用推估的倒數斜率$\hat{\theta}_i$計算壽命時間$D_f^{\beta}\hat{\theta}_i$，其被假設是服從Weibull($\beta$, λ/D_f^{β})分佈，貝氏分析假設壽命時間服從Weibull(β, λ/D_f^{β})分佈並且使用如前所用的β及λ值，其所產生的尾部彙總表列在表3中，注意不管你多麼不在乎不確定度，並假設推估的倒數斜率為真正的倒數斜率，其將引導你所興趣的百分比在人為上有較嚴謹的信用區間。

討　論

本文展現出衰減資料如何可被加以模式化並且它們對壽命時間資料如何提供優勢。對雷射衰減模式是相當地簡單——線性且沒有截距，對其它的應用模式可能更複雜，其包含更多的參數如為個線性具有截距的模式或是一個非線性的模式，像倒數斜率的雷射衰減模式是隨機的，而且一個單體和一個單體之間是各不相同的，在這些較複雜的衰減模式中部份或所有的模式參數可能是隨機的。

已經利用貝氏方式以分析衰減資料，很自然地這個方法也處理較複雜的衰減模式，我們已展示了貝氏為何有評估可靠度的優勢，因為可靠度和壽命時間分佈百分比是模式參數的函數，這些百分比的尾部之抽離可以很容易地從模式參數的尾部獲得，每一個抽離，只要簡單地評估有興趣的數量以從數量的尾部獲得抽離，當母體也涵蓋不同壽命的單體，母體可靠度可以很容易地靠評估有關母體壽命分佈之期望可靠度來求得。（資料來源：ASQ Quality Engineering, Volume17, Number4,2005）

參考文獻

Casella, G., George, E.(1992). Explaining the Gibbs Sampler. The American Statistician 46:167-174.

Chiao, C. H., Hamada, M. (1996). Using Degradation Data from an Experiment to Achieve Robust Reliability for Light Emitting Diodes. Quality and Reliability Enginering International 12:89-94.

Chiao, C.H., Hamada, M. (2001). Experiments with Degradation Data for Improving Reliability and for Achieving Robust Reliability. Quality and Reliability Engineering International 17:333-344.

Chib, S., Greenberg, E.(1995). Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. The American Statistician 49:327-335.

Gelman, A. B., Carlin, J. S., Stern, H. S., Rubin, D. B. (1995). Bayesian Data Analysis. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC.

Lu, C. J., Meerker, W. Q. (1993). Using Degradation Measurements to Estimate a Time-to-Failure Distribution. Technometrics 35:161-174.

Lu, C. J., Meeker, W. Q., Escobar, L.A.(1996). Using Degradation Measurements to Estimate a Time-to-Failure Distribution. Statistica Sinica 6:531-546.

Meeker, W.Q., Escobar, L.A.(1998). Statistical Methods for Reliability Data. New York: John Wiley and Sons.

Spiegelhalter, D., Thomas, A., Best, N.(2000). WinBUGS Version 1.3 User Manual, available at http://www.mrcbsu.cam.ac.uk/bugs/.

Tseng, S. T., Hamada, M., Chiao, C. H. (1995). Using Degradation Data from a Factorial Experiment to Improve Fluorescent Lamp Reliability. Journal of Quality Technology 27:363-369.

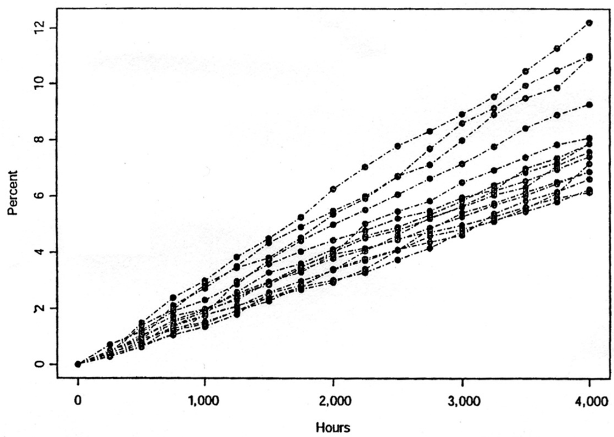

Figure 1. Plot of laser degradation data.

Table 1
Laser posterior summaries based on degradation data

Parameter	Mean	SD	Quantiles				
			0.025	0.050	0.500	0.950	0.975
β	5.688	0.9496	3.692	4.014	5.765	7.037	7.139
λ	6.628E-11	1.348E-9	2.587E-20	4.934E-20	1.626E-16	1.1E-11	8.531E-11
σ_ε	0.2063	0.009792	0.1882	0.1909	0.2059	0.2231	0.2266
$R(4500)$	0.7107	0.08402	0.5236	0.5575	0.7200	0.8317	0.8477
$t_{0.1}$	3650.0	348.6	2852.0	3006.0	3699.0	4137.0	4206.0

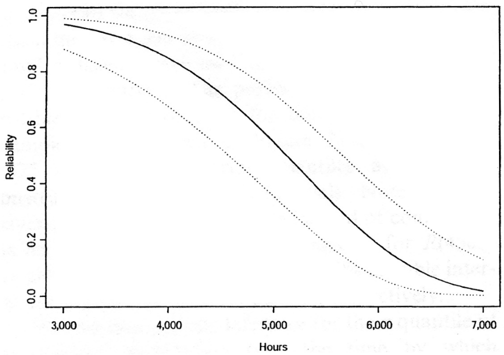

Figure 2. Laser reliability and 95% credible intervals. The pointwise posterior medians are given by the solid line. the pointwise 0.025 and 0.975 posterior quantiles are given by the dotted lines.

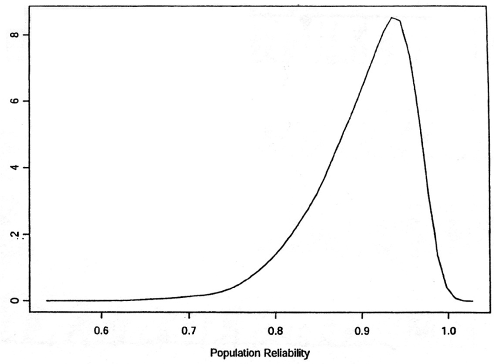

Figure 3. Laser population reliability posterior.

Table 2

Laser posterior summaries based on lifetime data

			Quantiles				
Parameter	Mean	SD	0.025	0.050	0.500	0.950	0.975
β	5.644	2.33	1.393	1.896	5.357	9.667	10.12
λ	3.542E-5	0.002315	8.319E-28	1.311E-26	2.124E-15	2.138E-6	4.666E-5
$R(4500)$	0.6677	0.1636	0.3004	0.3624	0.6905	0.8978	0.9215
$t_{0.1}$	3584.0	611.3	2272.0	2641.0	3592.0	4476.0	4801.0

Table 3

Laser posterior summaries based on pseudolifetime data

			Quantiles				
Parameter	Mean	SD	0.025	0.050	0.500	0.950	0.975
β	6.309	1.313	3.904	4.214	6.262	8.612	8.989
λ	9.623E-12	2.119E-10	1.851E-25	2.026E-24	6.718E-18	3.075E-12	2.167E-11
$R(4500)$	0.7505	0.08945	0.5514	0.5875	0.76	0.8798	0.8956
$t_{0.1}$	3825.0	385.1	2972.0	3122.0	3863.0	4394.0	4476.0