破壞性量測的治具再現性與再生性

◎李麗女

評估一項量測系統的精確度的標準方法爲治具的再現性與再生性(GRR)的研究。這樣的一個研究包含有一項實驗，其中的每個物件必須經過多次的量測，由其結果，對單一物件（量測範圍）的多次量測之範圍再加以推估。當物件受到量測的影響或是物件的眞值是可變動的，將會面對到很嚴重的副作用，如此的量測即謂之破壞性的，運用標準的GRR架構於破壞性的量測，若不是不可能否則就是會造成量測範圍的高估，該篇文章乃在研究其替換性的架構，假如特定的條件存在，則可被使用於破壞性的量測，甚至是所要求的條件未能完全地符合，所提出的方法至少會使量測範圍的高估值較小。

簡 介

品質改善的統計性方法論，例如統計製程管制、the Shainin System以及6個Sigma的專案。主要是依據數據資料以確認改善的機會，結果，資料的可靠性就被視爲是一項重要的論點，前述三項的改善策略很明顯地要求實驗者去驗證他的量測程序之精確度。

評估一個量測系統的精確度之標準方法即是所謂治具再現性與再生性研究，當對量測系統有所存疑時，其結果有連續性的量測數據，則可以利用這樣的研究及量測，並透過交叉性的設計加以蒐集：每一個特定數目的物件（一般爲10個）並由一定數目的作業人員（一般爲3人）加以量測數次（一般爲2次），其結果再利用變異數分析模式加以分析，其中特定的變異零件伴隨有不同的量測範圍之來源（作業人員間，作業人員－產品交互作用，以及作業人員間的錯誤。）

對一個標準的GRR研究而言，物件可被加以度量一次以上是相當重要的，假如不是這樣的情形，則此種度量即謂之破壞性的，假使對單一物件的重覆量測是不可行的，則度量範圍必定是一個物件對一個物件變動的，而易令人混淆分不清的，本篇即在探討破壞性度量系統情況下的GRR研究之可行性，並且是限定於連續量測的情形。

■ 例子

本篇將考慮到不同的例子：

I 餅乾的重量：利用磅秤度量餅乾的重量，以時間考量其重量可以被視爲是常數的而且秤一片餅乾的重量是沒有受影響的，因此，此種量測是非破壞性的。

II 餅乾的抗力：爲了度量餅乾的抗力。施加壓力於其上，壓力是慢慢增加直到餅乾破裂，在餅乾破裂時所使用的壓力即爲其度量的抗力，此一量測是破壞性的，因爲在決定其抗力之後餅乾已破損了，而無法再做第二次的度量。

III 管線的壓力：在水管內的壓力可以利用一般的壓力計加以度量其壓力，雖然要決定如此的一個度量表的精確度，偶而會遇到水壓持續不斷地波動此一複雜情形，結果造成水壓的變動使得量測值亦變動而令人容易混淆。

IV 紙直昇機的飛行時間：爲了說明實驗設計以及其它的統計方法，最受歡迎的例子是利用紙製直昇機（參考Box及Liu(1999)），這些直昇機的一個重要特性值爲它們的飛行時間，從一個預先指定的高度拋出直昇機並以碼錶度量它在落地前所經過的時間，所度量的值即爲飛行的時間，若單一個人自單一次的飛行中不可能取得多次的量測值，因此，實驗者必須度量不同的飛行航次，無論如何，因爲飛行本身將是不同的，飛行時間在度量上之變異，有一部份並不是因爲量測在程序步驟所造成的，而是因爲在不同次的飛行之間就存在著變異。

GRR研究以及破壞性的量測

■量測

每個統計性的研究都與實驗性的單件具有相關性，其特性的目的已被研究過。所有單件的集合謂之母體，母體中的單件可按照－特定的特性（如此的一種分類稱之爲自然的變異性）加以分類，量測對映將此分類爲一種數字性的系統，舉餅乾爲單件（例子 I ）我們可以考慮重量的屬性，度量餅乾，我們對每塊餅乾（它的重量）指定一個數目字，一方面，在每塊餅乾之中存在著一個實務經驗上的關係（某些塊的餅乾比其它塊的餅乾還要重些），在另一方面，在重量值之間有數學上的關係（例如排序的關係以及距離矩陣被定義爲R），而這些數學上的關係傾向於反應出餅乾之間有實務經驗上的關係。

我們得到下述的定義，一個單件的量測屬性乃是指定一個數字給那個單件，其反應出單件乃按照研究的屬性加以分類（由Lord及Novick（1968），Allen及Yen(1979)，Wallsten(1988)定義）。在本論文，我們只考量使用連續尺度的量測程序，在那樣的情況下，則數字是R的一個元素或是子集合（事實上，量測值爲離散的尺度是最佳的，我們用"連續性的量測"之名詞作爲量測的因子乃因其具有充分的高解析度），之後一個量測值可加以描述爲一個映像Y：U→R，其中U爲量測程序中所使用的單件之集合。

爲了了解破壞性量測的GRR研究之問題（而且我們也必須了解非破壞性量測），及時地去了解所包含的物件是相當地重要的。因此，我們對於單件的定義稍加以修正，並且將單一的物件於兩個不同的時間點視爲是兩個不同的實驗單件，因此，我們以$u_{i,t}$表示元素U，i指的是一個特定的物件而t代表時間，一個單件$u_{i,t}$∈U的度量值以Y（$u_{i,t}$）表示之。

在例子 I 和 II 中，一個單件爲一個特定的餅乾i且在時間點t時度量之，而在例子III中，$u_{i,t}$爲一條水管線i其在時間點t時之水的水壓。

■治具的再現性與再生性的研究

因爲很多的量測程序都會遇到一個隨機量測的錯誤，其對應Y的部分是相當地複雜的，我們定義$F_{Y|u}(y)=P(Y(u)<y|u)$針對特定的$u \in U$，其定義了隨機量測錯誤的機率分佈，對一個大範圍之量測系統的效用性是由$F_{Y|u}$的特性加以決定的，量測系統分析一般上乃以其準確性及精確性(AIAG(2002))來判別一個量測系統的效用。

準確性是與量測範圍所遇到的偏差有相關性，對任何$u \in U$，令 $\mu_u=E_{Y|u}(Y(u))=\int ydF_{Y|u}(y)$爲一個單件之量測期望值， μ_u和物件的眞值間的差異爲偏差，即爲T(u)（亦即將以一種標準式的及權威授權式的量測系統指定給物件一個參考值），在本文之其餘部分，皆做如下之假設：

(a)偏差值爲常數性： $\mu_u-T(u)$是常數性的，只要u（線性）以及時間（穩定性）是常數的，本文將不詳述準確度，一個量測系統的變動與精確度較有緊密的關係，我們對單件$u \in U$的量測Y之量測展開定義爲均方根 $\sigma_u^2=E_{Y|u}(Y(u)-\mu_u)^2$----(1)

經常地，做如下之假設:

(b)量測錯誤的同質性：$E_{Y|u_{i,t}}(y-\mu_{u_{i,t}})=F_{Y|u_{j,s}}(y-\mu_{u_{j,s}})$，對所有的$u_{i,t},u_{j,s} \in U$，亦即測量錯誤的分佈等同於所有被度量的單件。

假設(b)成立，則被度量的單件其量測展開是相互獨立的，而且我們可得出對所有的$u \in U$時 $\sigma_u^2=\sigma^2$，我們必須在本文中從頭至尾假設(b)成立。

如果對一個物件u的度量是在相同的環境下（相同的人，而且是一個緊接著一個）執行，則量測的精確度是最佳的，其所伴隨的精確度即謂之再現性；假若是在不同的環境下執行度量，精確度經常性地將會是不好的。再現性則是在一個眞實的狀況下有某些特定的條件不同情況下之測量的精確度。一個GRR研究(Burdicket al(2003))是一項統計性的研究目的是要使一個量測系統的再現性與再生性的數據更加的明確化。

在典型的組織結構中其包含有一項實驗，其中有一定數目的物件由一定人數的作業人員每位度量數次,量測展開被分解爲三個變數要件： $\sigma^2=\sigma_o^2+\sigma_{po}^2+\sigma_e^2$，其中 σ_o^2爲歸屬於作業人員間系統性差異之變異； σ_{po}^2的變異則起源於每個物件作業人員間之額外的差異；而 σ_e^2則爲剩餘的誤差變異，再現性與 σ_e^2有相關性， σ_e^2和 σ_{po}^2與再生性有關。

■GRR研究之基本的問題

GRR研究之基本的問題一般上爲不可能以固定的$u_{i,t} \in U$去觀察超過一個$Y(u_{i,t})$的觀察值，因此，沒有做某些假設不可能去推估 σ^2。

GRR研究之基本問題在標準的(非破壞性的)GRR研究乃以兩個同質的假設加以解決：

(c)物件之暫時性之穩定：對一個物件i於任兩個瞬間點t,s在有關的時間區間$T(u_{i,t})=T(u_{i,s})$（已知(a)，因此 $\mu_{u_{i,t}}=\mu_{u_{i,t}}$），換言之，即不管物件是在那個時間點被度量，其測量値應該一樣。

(d) 量測相對於穩健性：物件i被度量前後的$T(u_{i,t})$值是相等的，換言之，當物件被度量時它們是不被影響的。

假設(c)以及(d)成立，量測錯誤的分佈可蒐集量測值$Y(u_i,t_j)$加以推估，其中i是固定的$j=1,\cdots,k$,則σ^2可以如下的方式加以推估$\hat{\mu}=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}Y(u_i,t_j)$ 且 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}(Y((u_{i,tj})-\hat{\mu})^2$實際上，研究將包含多個物件,$i=1,\cdots,n$,並且計算$\sigma$的一整堆推估值，在例子I中，我們可以假設(c)及(d)兩者並且進行一項標準的GRR研究。

破壞性的量測乃對不是(c)就是(d)不成立的那些量測程序，決定餅乾抗力強度的量測程序即是一個對(d)並不成立下之一種量測的例子；而度量管線內之壓力則爲是(c)並不成立的另一個例子。

在前述的陳述中，我們已限定了實驗性的單體爲物件，假設研究下的單體爲其它的現象，U必須編以不同的索引；例如，在例子四中的飛行單體，我們可以第i部直昇機的第j次飛行以$u_{i,j}$表示，其相對應的度量飛行時間爲$Y(u_{i,j})$，在本論文的後述部分，我們假設單體在目前當下被視爲是物體，這個理論可以直接的加以擴大到不同結構的母體。

根本的問題之解決方案

對破壞性量測，假如(c)及(d)其同質性的條件可以具有替代性之同質性的條件替換之而加以解決，則度量結果就成立並且其值具有相同的效果，本節提出一些同質性的條件，其可替代條件(c)及(d)且因此可取得σ的推估值，事實上，同質性的條件無法完善地適用，此一事實結果在下一章節將被研究到。

假如條件(c)適用（暫時性的穩定），則不同的時間點即不需加以區別，因此我們可以去掉時間指數，而以$U=\{u_i\}i=1,\cdots,n$表示。

■物體的同質性

在此一情況下，對於量測我們有暫時的穩定性而非穩健性（假設(c)適用，但是(d)並不適用），我們可以針對物體開發出一個潛在的（接近的）同質性。

(e)物體的同質性：有一個次集合H包含於U，對所有H中的所有u_i及u_j而言$T(u_i)=T(u_j)$，換言之：關於研究的量測，某些物件可被視爲是相同的，再者，假設(c)是適用的

假使(e)是可加以假設，就可以從H的樣本u_1...........u_k，中加以推估σ^2，而得出$\hat{\mu}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}Y(u_i)$及$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(Y(u_i)-\mu)^2$。

假使對重要的物件(e)並不適用，我們可以用某些巧妙的方法以尋找出一些替代的物體，$A=\{v_i\}_{i=1,\ldots,k}$，其遠超出了研究的單體($A\not\subset U$)，而其能適用於量測的程序，其中假設(e)適用（H爲A所取代了）而且亦可做如下同質性的假設：

(f)替代性物件的代表：$F_{Ylu_i}(y-\mu_{u_i})=F_{Ylu}(y-\mu_u)$，其中每個$v_i\in A$，而且任何的$u\in U$，換言之：假設(b)擴大到替換的物件$v_i\in A$。

我們可以度量特定塑膠棒的抗力以替代度量餅乾（例子II）的抗力，其被視爲是非常具有同質性的（假設(e),以A取代H），此即何以它們有相當一致的抗力。挑選出的棒子其斷裂時的壓力只是稍大

於或稍小於具有相同壓力的餅乾，我們也可以假設當度量這棒子的量測錯誤分佈表示爲當度量餅乾（假設(f)）時的量測錯誤之分佈，在紙直昇機（例子Ⅳ）的個案中，可能有一個類似的技巧：可以錄影帶記錄數次的直昇機飛行情形（例子Ⅳ），可以倒帶所錄下的影帶數次並度量其飛行的時間加以決定其量測展開値，Phillips et al.(1997)利用相類似的策略以決定一個物料抗力試驗之量測變異量。

■修正物件之間的異種成份

仍舊假設我們在量測上(d)有暫時的穩定性（假設(c)）但卻不具穩健性，研究我們所能做的，假使上述的技巧（以(e)代替(d)）無法達成所要的，則有一個想法是去做物質之間的異種成份之模型並且將之加以修正，因此，物件是以人工的方式達到同質的性質。

(g)仿做的物件變異：$T(u_i)=f(i)$對所有的u_i在次集合H中包含於U中，以f爲函數其有有限個之參數，換言之：物件之間的變異遵循著一個特定的模型，而且，(c)假設是成立的。

該模型可能是一個多項式的函數，如$f(i)=\beta_0+\beta_1 i, i=1,2,....,k$對連續性的產品$i=1,2,....,k$或是物件之間具有位置上的差異，也可以考慮移動平均或自動迴歸模式。已知單體的差異完全由此一模型（如假設(g)所描述的）所決定的，而且該模型的模式f爲已知，則可以下列的式子做估算量測錯誤σ，即$\sigma^2=\frac{1}{k-p}\sum_{i=1}^{k}(Y(u_i)-f(i))^2$其中p爲函數f必須加以推估的參數個數，而$u_i, i=1,....k$爲取自H的一個樣本。

假如，對某一特定順序的餅乾，其抗力是以下列的線性趨勢增加：

$T(u_i)=f(i)=\beta_0+\beta_1 i, i=1,2,....,k$,(2)其中$u_i$爲該順序餅乾的第$i$個，我們可以推估模型f的參數爲$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{k} Y(u_i)(i-\bar{i})}{\sum_{i=1}^{k}(i-\bar{i})^2}$ 而且$\hat{\beta}_0=\overline{Y(u_i)}-\hat{\beta}_1\bar{i}$因此，$\sigma^2$可以推估爲

$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k-2}\sum_{j=1}^{k}(Y(u_j)-\hat{f}(j))^2$，(3)其中$\hat{f}(j)=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 j$，

當然，實務上，一順序性的餅乾之抗力並未精確地遵循如等式(2)的模式，也將存在著某些隨機性的變異，此一隱藏式的事實將在下一章節中研究。

■與非破壞性量測程序的比較

在此一情況下(d)並不成立，因此可能可以去找尋一種非破壞性之替代性的量測程序，假如一個實驗者願意決定非破壞性量測系統的精確性，無論如何，他可以利用此一非破壞性的量測系統幫忙。

(h)存在一個替代性的量測程序使(d)成立，而且假設(c)亦成立。

我們選定了一種樣品的k個物件並且使用替換的量測程序對它們進行一項標準式的GRR研究，這就容許我們去推估變異數σ_p^2之物件的眞值，其次，所有的物件利用重要的量測程序再度量一次，這些量測值的變異數在減去$\hat{\sigma}_p^2$之後，推估爲σ^2。

舉個例，想想如何決定在顯示器上磷層的厚度，其厚度可透過一套設備的幫忙而加以決定，由設備送出一道射線穿越顯示器並度量有多少光源是被遮蔽掉，因爲其不具可移動性，無法使用此一非破壞性

的量測系統，但是，在生產現場它卻是必須加以量測的，因爲這個理由，在製造期間作業人員使用一套可替換的量測程序，使得在某一特定區域的磷可被刮除並加以稱其重量，因爲此一破壞性的量測程序是被使用於製造程序中，其精確性需要加以評估，作業人員利用上述的步驟程序多做數次。

■一套完善破壞性的量測程序之比較

假設我們有一套可替換的、破壞性的量測程序，則在實務上其量測展開值爲零（相當昂貴的實驗設備）。

(i)存在一套可替換的量測程序X，對所有的u_i∈U時X(u_i)=T(u_i)，而且假設(c)是成立的。

我們選定一樣品的k個物件並隨機地將其分成兩個次樣品組，一組是利用可替換的程序加以度量的，這些量測值的變異數給予我們在這些樣品中的物件之推估變異數 σ_p^2，另一組次樣品組是利用重要的程序加以度量的，這些量測值的變異數減掉 $\hat{\sigma}_p^2$即可推估出 σ^2。

■暫時性不穩定之校正

假使暫時性的穩定（假設(c)）不成立，則可以持續隨時地調整此一不規則的變動之模型並加以校正：

(j)仿做的暫時性變動：對所有的$u_{i,t}$，次集合H屬於U則T($u_{i,t}$)=f($_{i,t}$),對函數f其有有限個的參數，換言之：物件經過一段時間的變異是遵循某一特定的模式。

已知在時間點t_1,…………t_k，對單一物件$_i$的多個量測值，量測誤差可以下列式子加以估計：

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k-p}\sum_{j=1}^{k}(Y(u_{i,t_j})-\hat{f}(i,t_j))^2$$

在實務上，我們可以投入多個物件並且將估計的變異數共同放在一起，依照此一方法，我們可以推估一個ARIMA模式T(u_t)＝f(t)以描述在時間t（例子III）時水管的壓力T(u_t)並且取此一模式的餘數變異數做爲 σ^2的一個推估值。

■度量參考性的物料

若不是(c)就是(d)不成立，則可能可以取得具有完整的量測值之單體，亦即，它們的眞值是已知的，典型上，此一狀況是我們已經有可支配的校正物料其具有已知的眞值。

(k)已知的眞值：T(v_{i,t_i})對單體v_{i,t_i}∈A,i=1,……k爲已知的，換言之：我們可以找到可替換的單體而其眞值爲已知的，再者，對A而言假設(f)成立，而且也假設量測系統的偏差值爲零（或已知的，因此它可被加以校正的）。量測值的誤差可以第(4)式加以估計

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(Y(v_{i,t_i})-T(v_{i,t_i}))^2\text{...(4)}$$

可能可以買在特定的壓力下斷裂（例子II）的塑膠棒，這些棒子可被度量以代替餅乾，此度量的展開乃從等式(4)中推估的，可加以假設爲代表當度量餅乾的抗力時其量測值的展開。

備註：假如量測系統的偏差是未知的，則它可以從

$$\hat{b}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(Y(\upsilon_{i,t_i})-T(\upsilon_{i,t_i}))^2$$

推估之，針對估計偏差值其量測值需加以校正，而且等式(4)中的係數一必須以一替代。

假如均勻性的條件並未圓滿地成立將會發生什麼事？

在前面的章節中，我們已經知道－為了要克服GRR研究的基本問題－實驗者必須採用假設(c)至(k)中的一個或多個的假設，但通常這些假設只在一特定的範圍內才成立，一般而言，所獲得的量測值之展開的估計值之結果都會高估了眞實的量測展開值。

例如：想想餅乾的例子（例子II），假使我們假設某一特定結果的餅乾之抗力遵循等式(2)的模式，可得知餅乾抗力的變動性也有一種隨機的成份，我們以下式描述餅乾i的眞實抗力$T(u_i)=\beta_0+\beta_1 i+\varepsilon_i$，其中$\varepsilon_i$為獨立的取自$N(0,\sigma_p^2)$分佈，假使此一模式有一準確的眞實代表性，則等式(3)中所定義的估計值有其期望值並非為σ^2而是為$E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2+\sigma_p^2$，亦即隨機性的物件對物件的變動和量測展開是交絡的，好消息是估計的量測展開是相當的安全：假如估計的量測展開是相當令人滿意的，則眞實的量測展開亦會令人滿意。高估量測值展開的另一個負面效應為量測系統被錯誤地判斷，其不準確性的機會提高了，為了降低這個機會，需盡力取得符合假設(c)至(k)之較大範圍之合宜的單體，此為下一章節的主題。

為了更清楚：假如均勻性的假設並未全然地成立，理論上不可能從量測值展開去區別物件的變動性，很簡單地因為此一資訊並未包含於可被收集到的資料中。Bergeret et al. (2001) 聲稱已經尋找到一個方法以完成此等區別，他們的方法包含有一個兩階段的實驗其乃利用蜂巢式的變異數分析模式建構的。他們的方法之缺點為MSp&e必須寫成MSp&e&loc因為它不只混有料件的變動性及再現性而且也有地點的變動性，單體的平均變異數可能是σ_p^2，但對單一地點的每個單體的量測變異數為$\sigma_p^2+\sigma_{loc}^2$，結果是估計值$S^2$repeat之期望值為$\sigma_{loc}^2+\sigma^2$可取代$\sigma^2$。

破壞性的實驗設計之GRR研究

■在假設(c)和(d)下之GRR研究

標準的GRR研究有實驗者收集量測件隨著一項交叉性的設計：每個物件I由J位作業員每人度量K次，第k個量測值由j作業員針對物件i做度量表示為y_{ijk},$i=1,\cdots,I$,$j=1,\cdots J$，而且$k=1,\cdots K$，假設(c)和(d)這些量測值典型的模式為$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}$，其中$\alpha_i\sim N(0,\sigma)$為隨機物件效應，$\beta_j\sim N(0,\sigma_o^2)$為隨機作業員效應，$(\alpha\beta)_{ij}\sim N(0,\sigma_{po}^2)$為物件一作業員交互作用，而且$\varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma_e^2)$為誤差，資料可利用ANOVA方法（參考表1，其利用標準的ANOVA符號，請參考Montgomery(1997)）加以分析，取適當的均方之性組合，實驗者找出σ_o^2, σ_{po}^2及σ_e^2,的估計值，總量測展開

推估為$\sqrt{\hat{\sigma}_o^2+\hat{\sigma}_{po}^2+\hat{\sigma}_e^2}$。

在個案(c)或(d)並未全然地成立(物件不是全然地穩定或是些微地受量測所影響)，有些變異數成份是被高估，假設量測值$\{y_{ijk}\}_{jk}$是以隨機的順序完成的，只有$\hat{\sigma}^2_e$是受影響的。

■**在假設(e)和(f)下之GRR研究**

可以使用相類似的設計，但是有關對單一物件之重覆性的量測可以不同的物件量測加以取代，實驗者選擇了JK個物件中的I個樣本，並假設其對於研究中的量測具有均勻性，每位J個作業員度量這些K個物件一次，則資料模型列爲$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}$其中$\alpha_i\sim N(0,\sigma^2_p)$具有隨機樣本效應，$\beta_j\sim N(0,\sigma^2_o)$爲隨機作業員效應，$(\alpha\beta)_{ij}\sim N(0,\sigma^2_{po})$爲樣本一作業員交互作用而且誤差$\varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2_e)$。一個樣本的JK個物件之效應在作業員因子之內形成一個窩巢，這可能解答了爲什麼很多的Six Sigma課程將此一設計視爲是窩巢，這名稱有點欺騙性，因爲樣本因子仍與作業員因子相左，但是物件因子–雖然它實在是形成了一個窩巢–並未顯示於模式中。

ANOVA分析類似於表1中所列的，但是物件必須以樣本替代之，再者，實驗者可以估計σ^2_o, σ^2_{po}及σ^2_e，假如(e)或是(f)只以逼近的方式而成立，σ^2_e將會被高估（假設實驗者已適當地隨機排列量測值的順序）。

■**在假設(g)下之GRR研究**

實驗者針對模式f可以利用歷史性的估計值，在時間線上當此模式是不變的則適用此一選擇，舉例子II爲例，它可能的情形爲取自烤爐輸送帶上不同位置的餅乾，其抗力爲已知的而且是有固定的差異性，在瞬時時間I，實驗者可以從不同的位置選取，JK個餅乾，J位作業員每位度量這些餅乾K次，則可將量測值列模式爲

$y_{ijk}-\gamma_{jk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}$其中$\gamma_{jk}$爲假設的已知之抗力差（比較整體的平均值）餅乾乃取自位置j,k，如同前述$\beta_j\sim N(0,\sigma)$而$\varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2_p)$，現在我們有樣本效應、$\alpha_i\sim N(0,\sigma^2_{po})$而且作業員與樣本交互作用的效應$(\alpha\beta)_{ij}\sim N(0,\sigma^2_{po})$以取代物件效應，利用表1中的均方之分析，實驗者可以估計σ^2_o, σ^2_{po}和σ^2_e因此總量測展開值爲$\sqrt{\sigma^2_o+\sigma^2_{po}+\sigma^2_e}$，在餅乾之間的樣本內的變動，並未考慮到$\gamma_{jk}$與$\sigma^2_e$的交絡性。

其它的選擇是從使用於估計量測值的可變動性之相同資料中估計模式f，依照所考慮的模式，設計必需加以修剪，我們提供兩個例子。

假若我們可以從不同的位置拿取物件，而且我們假設這些位置之間有固定的差，在表2中可以發現有I=6的樣本及J=6的作業員之可能的實驗設計，該一設計是根據6×6的拉丁方格設計的，每個樣本包含有取自位置k=1,2,......,6的物件。

取自位置k的一個物件以及在樣本i中由第j個作業員所度量的量測值以y_{ijk}表示（注意：已知i及j,k完全由表2決定），我們想想下列的模式：$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_k+\varepsilon_{ijk}$....(5),其樣本及作業員效應$\alpha_i$及$\beta_j$被視爲是隨機的，位置k=1,2,. . . . . 6之間的固定差在γ_k中被做成模型，ANOVA分析遵循表3的樣板，這種類型的設計模式通常是附加的（亦即並不包含交互作用的關係，參考Montgomery（1997,5-2章節），結果，該方法只適用於假若樣本和作業員沒有交互作

業的效應存在之假設下，更進一步的設計允許一項交互作用關係的結論，但是相伴隨的分析所帶來之複雜度，遠超過本文的範圍，取均方的線性組合，使得表3得以允許估計 σ_o^2及 σ_e^2。

第二個例子我們是要研究例子II（餅乾抗力)，我們假設連續性的餅乾抗力是以線性的方式增加或減少，至少當我們只考慮到短暫的時段，我們希望該模式能解釋在連續性的餅乾之間其抗力變動的主要部份。爲了簡化該一例子，我們只估計總量測展開 σ ，但在此，我們必須表達出如何延伸此一方法以能推估量測展開要素 σ_o^2 ，σ_{po}^2和 σ_e^2。

實驗者選擇了I=6個樣本及J=6塊連續的餅乾（參考表4），利用ANCOVA模式建構此一資料$y_{ij}= \mu+\alpha_i+\beta_i(j-(J+1)/2))+ \varepsilon_{ij}$，$\alpha_i$表示樣本效應，一個樣本$i$內的線性趨勢之斜率則以$\beta_i$表示， ε_{ij}的變異數σ^2現在則代表總量測變動，共變異數的標準分析(Montgomery 1997, 4-7節)及Horton(1978)）產生了ANCOVA表(表5)。

我們利用誤差均方以估計量測展開，以ANCOVA模式計算爲：

$$\text{MS誤差}=\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2-\sum_{i=1}^{1}\hat{\beta}_i^2\sum_{j=1}^{J}(j-\frac{J+1}{2})^2}{I(n-1)-J}$$

$$\text{且}\ \hat{\beta}_i=\frac{\sum_{j=1}^{J}(j-\frac{J+1}{2})(y_{ij}-\bar{y}_{i.})}{\sum_{j=1}^{J}(j-\frac{J+1}{2})^2}$$

量測誤差是以$\sigma=\sqrt{0.0326}=0.18$推估的，其爲一個悲觀的估計值，因爲MS誤差交絡於量測誤差和餅乾對餅乾的變動，其並非由線性趨勢加以解釋的，我們並沒有將樣本內的變異歸類爲線性趨勢，因此模式將減化爲一個單因子的ANOVA，估計的量測錯誤做爲誤差的均方根，我們將可得出$\sigma=0.32$。

在分析上，該方法可以擴充到併入作業員和作業員×樣本的交互作用效應，假設一個數字K=3爲作業員的人數，實驗者隨機地指定每種樣本的兩塊乾餅給每位作業員，則模式變爲：$y_{ijk}= \mu+\alpha_i+\gamma_k+(\alpha\gamma)_{ik}+\beta_i(j-(J+1)/2)+\varepsilon_{ijk}$，其中$\gamma_k$和$(\alpha\gamma)_{ik}$爲作業員及作業員×樣本交互作用效應，在該模式中的關係可以ANCOVA方法加以推估；均方的適當性組合可用以推估 σ_o^2, σ_{po}^2和 σ_e^2, 雖然此一分析並非是直接的而且因爲那個原因已遠超過本文的範圍。

結 論

爲了估計量測展開，一個實驗者需要對單一物件做多重的量測，在很多情況下，這可以藉由假設物件在時間上是不變的，而且度量的動作並不會影響它們來加以完成。當這些假設並不成立時，尤如破壞性量測的情況，量測變動是與其它來源的變動相互交絡的，實驗者可以取得一個良好的量測展開估計值，假如他可以利用特定形式的均勻。在本文中，介紹了各種不同均勻性假設的例子（假設(c)至(k)，請參考表6），它們是根據這個想法，即不管是不計干擾性來源變動的影響或是其結果可加以校正以降低其影響性。

實驗者所訂定之已知的均勻性假設將只符合一特定的範圍，其交絡性的問題並未完全地加以解決，結果造成量測展開值將被高估，較佳的實驗者成功於安排它的GRR實驗而且其條件是均勻性的，則高估的數值會較小。

雖然時常建議否則在文獻上（期望在實務上偶而有提出者）當沒有均勻性假設可加以調整，仍不會有統計上的技巧以解決此一交絡性的問題：在破壞性量測及GRR研究的基本原則之間仍存在著一種拉張力。

參考文獻：

AIAG(2002). Measurement System Analysis; Reference Manual, 3rd ed. Automotive Industry Action Group, Detroit, MI.

ALLEN, M. J. and Yen, W. M. (1979). Introduction to Measurement Theory. Wadsworth, Belmont, C.A.

BERGERET, F.; MAUBERT, S.; SOURD, P.; and PUEL, F. (2001). "Improving and Applying Destructive Gauge Capability" Quality Engineering 14(1), pp. 59-66.

Box, G.E.P. and LIU, P.Y.T.(1999), "Statistics as a Catalyst to Learning by Scientific Method; Part I-An example." Journal of Quality Technology 31(1), pp.1-15.

BURDICK, R. K.; BORROR, C.M.; and MONTGOMERY, D.C. (2003). "A Review of Methods for Measuremet Systems Capability Analysis." Journal of Quality Technology 35(4), pp.342-354.

HORTON, R. L. (1978). The General Linear Model. McGraw-Hill, New York.

LORD, F. M. and NOVICK, M. R. (1968). Statistical Theories of Mental Test Scores. Addison-Wesley, Reading, MA.

MONTGOMERY, D.C. (1997). Design and Analysis of Experiments, 4th ed. Wiley, New York.

PHILLIPS, A. R.; JEFFRIES, R.; SCHNEIDER, J.; and FRANKOSKI, S. P. (1997). "Using Repeatability and Reproducibility Studies to Evaluate a Destructive Test Method." Quality Engineering 10(2), pp. 283-290.

WALLSTEN, T.S. (1988). "Measurement Theory." Encyclopedia of Statistical Sciences, 8th ed., Kotz, S.; and Johnson, N. L. (eds.). Vol.5. Wiley, New York.

（資料來源：ASQ January 2005 Vo1.37/No.1)

表1. ANOVA表

Source	df	Sum of Squares	Expected mean square
Objects	$I-1$	$JK\sum_i(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2$	$\sigma_e^2+K\sigma_{PO}^2+JK\sigma_P^2$
Operator	$J-1$	$IK\sum_j(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2$	$\sigma_e^2+K\sigma_{PO}^2+IK\sigma_O^2$
Object × 0perator	$(I-1)(J-1)$	$K\sum_{i,j}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2$	$\sigma_e^2+K\sigma_{PO}^2$
Error	$IJ(K-1)$	$\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2$	σ_e^2

表2. 拉丁方格設計（輸入值代表位置k∈{1,.....,6}

	Operator					
Sample	1	2	3	4	5	6
1	1	4	3	5	2	6
2	2	1	5	3	6	4
3	3	5	4	6	1	2
4	4	3	6	2	5	1
5	6	2	1	4	3	5
6	5	6	2	1	4	3

表3 拉丁方格設計的ANOVA表，備註I=J=K=P

Samples	$p-1$	$p\sum_i (\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2$	$\sigma_e^2 + p\sigma_p^2$
Operator	$p-1$	$p\sum_j (\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2$	$\sigma_e^2 + p\sigma_o^2$
Position	$p-1$	$p\sum_k(\bar{y}_{..k}-\bar{y}_{...})^2$	$\sigma_e^2 + [p/(p-1)]\sum_k\gamma_k^2$
Error	$(p-2)(p-1)$	$\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{..k}+2\bar{y}_{...})^2$	σ_e^2

表4 餅乾抗力

Samples	Serial Number 1	2	3	4	5	6
1	11.0	11.0	11.1	11.2	11.1	11.4
2	9.4	9.5	9.6	9.6	9.9	10.4
3	8.5	8.8	9.1	9.3	9.9	9.4
4	10.3	10.1	10.0	10.4	10.6	10.5
5	9.7	9.7	9.7	9.8	10.3	10.0
6	9.0	9.1	9.5	9.6	9.5	9.9

表5 ANCOVA表

Source	df	Adj SS	Adj MS	F	P
Trend	1	1.9612	1.9612	60.08	0.000
Sample	5	4.6887	0.9377	28.73	0.000
Sample×trend	5	0.3504	0.0701	2.15	0.094
Error	24	0.7834	0.0326		

表6 本文所彰顯出的方法及假設之綜觀表

Standard Assumptions		
a	Constancy of bias	
b	Homogeneity of measurement error	
c	Temporal stability of objects	
d	Robustness against measurement	
Approaches for Destructive Measurements		**Additional Assumptions**
e	Homogeneity of objects Within small samples, object-to-object variation is negligible	a,b,c
f	Representativeness of alternative objects There are alternative objects for which object-to-object variation is negligible	a,b,c,e
g	Patterned object variation The object-to-object variation can be modeled and thus corrected for	a,b,c
h	Alternative, nondestructive measurement system There is an alternative measurement system that is nondestructive	a,b,c
i	Alternative perfect, destructive measurement system There is an alternative measurement system that is destructive but has virtually no measurement spread	a,b,c
j	Patterned temporal variation The temporal variation can be modeled and thus corrected for	a,b
k	Known true values There are refrence objects with known true values	a,b,f